



Detail containing the magic square in Albrecht Dürer's engraving *Melencolia I* (1514).

A **heterosquare** is an arrangement of  $n^2$  *distinct* numbers (i.e. each number is used once) in a square  $n \times n$  grid, where the numbers in each row, in each column, and the numbers in the main and secondary diagonals all add up to a *distinct* number. As an example, here is an order-4 heterosquare.

```
2 1 3 4
5 6 7 8
9 10 11 12
13 14 15 16
```

An **antimagic square** is a heterosquare whose row, column and diagonal sums are consecutive integers (if arranged in ascending order). As an example, here is an order-4 antimagic square.

```
2 15 5 13
16 3 7 12
9 8 14 1
6 4 11 10
```

## Assignment

In this assignment we represent a square  $n \times n$  grid as a sequence (a list or a tuple) of  $n$  elements, that represent the rows of the grid. Each row is itself represented as a sequence (a list or a tuple) of  $n$  integers, that represent the successive numbers on that row. Your task is to implement the following five functions, that all take a square  $n \times n$  grid as their argument.

- A function `numbers` that returns a set containing all distinct numbers that occur in the square grid.
- A function `sums` that returns a set containing the distinct sums of all rows, columns and diagonals of the square grid.
- A function `magic` that returns a Boolean value, that indicates whether or not the given square is magic.
- A function `hetero` that returns a Boolean value, that indicates whether or not the given square is a heterosquare.
- A function `antimagic` that returns a Boolean value, that indicates whether or not the given square is antimagic.

## Example

```
>>> numbers([[2, 7, 6], [9, 5, 1], [4, 3, 8]])
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
>>> numbers([[2, 1, 3, 4], [5, 6, 7, 8], [9, 10, 11, 12], [13, 14, 15, 16]])
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16}
>>> numbers([[2, 15, 5, 13], [16, 3, 7, 12], [9, 8, 14, 1], [6, 4, 11, 10]])
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16}

>>> sums([[2, 7, 6], [9, 5, 1], [4, 3, 8]])
{15}
>>> sums([[2, 1, 3, 4], [5, 6, 7, 8], [9, 10, 11, 12], [13, 14, 15, 16]])
```

```

{34, 35, 36, 40, 10, 42, 26, 58, 29, 31}
>>> sums([[2, 15, 5, 13], [16, 3, 7, 12], [9, 8, 14, 1], [6, 4, 11, 10]])
{32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 29, 30, 31}

>>> magic([[2, 7, 6], [9, 5, 1], [4, 3, 8]])
True
>>> magic([[2, 1, 3, 4], [5, 6, 7, 8], [9, 10, 11, 12], [13, 14, 15, 16]])
False
>>> magic([[2, 15, 5, 13], [16, 3, 7, 12], [9, 8, 14, 1], [6, 4, 11, 10]])
False

>>> hetero([[2, 7, 6], [9, 5, 1], [4, 3, 8]])
False
>>> hetero([[2, 1, 3, 4], [5, 6, 7, 8], [9, 10, 11, 12], [13, 14, 15, 16]])
True
>>> hetero([[2, 15, 5, 13], [16, 3, 7, 12], [9, 8, 14, 1], [6, 4, 11, 10]])
True

>>> antimagic([[2, 7, 6], [9, 5, 1], [4, 3, 8]])
False
>>> antimagic([[2, 1, 3, 4], [5, 6, 7, 8], [9, 10, 11, 12], [13, 14, 15, 16]])
False
>>> antimagic([[2, 15, 5, 13], [16, 3, 7, 12], [9, 8, 14, 1], [6, 4, 11, 10]])
True

```

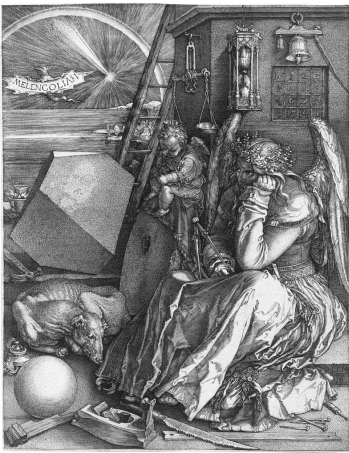
Een **magisch vierkant** of **tovervierkant** is een vierkant  $n \times n$  rooster dat opgevuld wordt met  $n^2$  *verschillende* natuurlijke getallen (elk getal komt slechts één keer voor), zodat de  $n$  rijen, de  $n$  kolommen en beide diagonalen allemaal *dezelfde* som opleveren. Het getal  $n$  wordt de *orde* van het vierkant genoemd. De unieke som wordt de *magische constante* of het *karakteristieke getal* van het vierkant genoemd. Hieronder zie je bijvoorbeeld een magisch vierkant van orde 4 met magische constante 34.

```

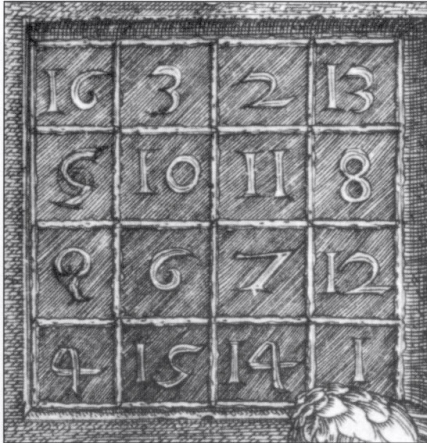
16 3 2 13
5 10 11 8
9 6 7 12
4 15 14 1

```

Dit bekend magisch vierkant komt voor op de gravure *Melencolia I* (melancholie) van Albrecht Dürer uit 1514. Merk op dat het jaartal van de gravure verwerkt zit in de onderste rij van het vierkant. Dit magische vierkant is niet alleen opmerkelijk omdat alle rijen, kolommen en diagonalen dezelfde som 34 hebben, maar onder meer ook de vier hoekpunten, de vier middelste getallen, de  $2 \times 2$  getallen in de linkerbovenhoek, rechterbovenhoek, linkerbenedenhoek en rechterbenedenhoek, en de twee middelste getallen in de eerste en laatste kolom, respectievelijk de bovensten en onderste rij.



Gravure *Melancholia I* van Albrecht Dürer uit 1514.



Detail met magisch vierkant uit de gravure *Melancholia I* van Albrecht Dürer uit 1514.

Een **heterovierkant** is een vierkant  $n \times n$  rooster dat opgevuld wordt met  $n^2$  *verschillende* natuurlijke getallen, zodat de  $n$  rijen, de  $n$  kolommen en beide diagonalen allemaal een *verschillende* som opleveren. Hieronder zie je bijvoorbeeld een heterovierkant van orde 4.

2	1	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Een **antimagisch vierkant** is een heterovierkant waarvan de sommen van de rijen, de kolommen en beide diagonalen een opeenvolgende reeks natuurlijke getallen vormen (als ze eerst in stijgende volgorde gesorteerd worden). Hieronder zie je bijvoorbeeld een antimagisch vierkant van orde 4.

2	15	5	13
16	3	7	12
9	8	14	1
6	4	11	10

## Opgave

In deze opgave stellen we een vierkant  $n \times n$  rooster voor als een sequentie (een lijst of een tuple) met  $n$  elementen, die de rijen van het rooster voorstellen. Elke rij wordt op haar

beurt voorgesteld als een sequentie (een lijst of een tuple) van  $n$  integers, die de opeenvolgende getallen op de rij voorstellen. Gevraagd wordt om de volgende vijf functies te schrijven, waaraan telkens een vierkant  $n \times n$  rooster als argument moet doorgegeven worden.

- Een functie `getallen` die een verzameling teruggeeft met alle verschillende getallen die in het vierkant rooster voorkomen.
- Een functie `sommen` die een verzameling teruggeeft met de verschillende sommen van alle rijen, kolommen en diagonalen van het vierkant rooster.
- Een functie `magisch` die een Booleaanse waarde teruggeeft, die aangeeft of het gegeven vierkant een magisch vierkant is.
- Een functie `hetero` die een Booleaanse waarde teruggeeft, die aangeeft of het gegeven vierkant een heterovierkant is.
- Een functie `antimagisch` die een Booleaanse waarde teruggeeft, die aangeeft of het gegeven vierkant een antimagisch vierkant is.

## Voorbeeld

```
>>> sommen([[2, 7, 6], [9, 5, 1], [4, 3, 8]])
{15}
>>> sommen([[2, 1, 3, 4], [5, 6, 7, 8], [9, 10, 11, 12], [13, 14, 15, 16]])
{34, 35, 36, 40, 10, 42, 26, 58, 29, 31}
>>> sommen([[2, 15, 5, 13], [16, 3, 7, 12], [9, 8, 14, 1], [6, 4, 11, 10]])
{32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 29, 30, 31}

>>> getallen([[2, 7, 6], [9, 5, 1], [4, 3, 8]])
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
>>> getallen([[2, 1, 3, 4], [5, 6, 7, 8], [9, 10, 11, 12], [13, 14, 15, 16]])
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16}
>>> getallen([[2, 15, 5, 13], [16, 3, 7, 12], [9, 8, 14, 1], [6, 4, 11, 10]])
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16}

>>> magisch([[2, 7, 6], [9, 5, 1], [4, 3, 8]])
True
>>> magisch([[2, 1, 3, 4], [5, 6, 7, 8], [9, 10, 11, 12], [13, 14, 15, 16]])
False
>>> magisch([[2, 15, 5, 13], [16, 3, 7, 12], [9, 8, 14, 1], [6, 4, 11, 10]])
False

>>> hetero([[2, 7, 6], [9, 5, 1], [4, 3, 8]])
False
>>> hetero([[2, 1, 3, 4], [5, 6, 7, 8], [9, 10, 11, 12], [13, 14, 15, 16]])
True
>>> hetero([[2, 15, 5, 13], [16, 3, 7, 12], [9, 8, 14, 1], [6, 4, 11, 10]])
True

>>> antimagisch([[2, 7, 6], [9, 5, 1], [4, 3, 8]])
False
>>> antimagisch([[2, 1, 3, 4], [5, 6, 7, 8], [9, 10, 11, 12], [13, 14, 15, 16]])
False
>>> antimagisch([[2, 15, 5, 13], [16, 3, 7, 12], [9, 8, 14, 1], [6, 4, 11, 10]])
True
```