

Marsaglia method

Preparation

The module [random](#) from the Standard Python Library can be used for (amongst other things) generating random numbers. The function `random()` from this module generates a random *real* number from the interval $[0, 1]$. The function `randint(a, b)` on the other hand, can be used to generate a random *integer* from the interval $[a, b]$. The interactive Python session below indicates how you can use the functions from the `random` module with some examples.

```
>>> import random
>>> help(random.random)
Help on built-in function random:

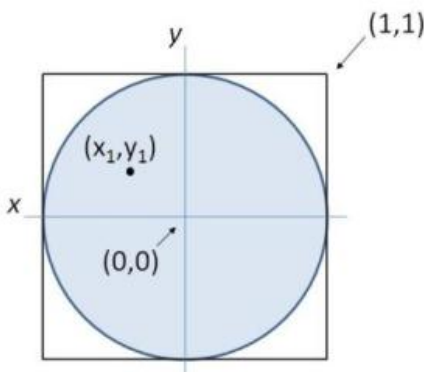
random(...)
    random() -> x in the interval [0, 1).
>>> random.random()
0.954131645221452
>>> random.random()
0.3548429482674793

>>> help(random.randint)
Help on method randint in module random:

randint(self, a, b) method of random.Random instance
    Return random integer in range [a, b], including both end points.
>>> random.randint(3, 10)
5
>>> random.randint(3, 10)
8
```

Description

A sphere can be represented as a collection of all points on a distance r from the central point $(0,0,0)$. If $r=1$, it is named a unit sphere. The [Marsaglia method](#) can be used to generate a random point on a sphere with radius r . In a first step of this method, a random point (x_1, y_1) is chosen that lays within the unit sphere. To this point applies that: $x_1^2 + y_1^2 \leq 1$. In order to do this, random points are generated in the 2-by-2 square $[-1, 1] \times [-1, 1]$ with centre in $(0,0)$, until a point is found that lays within the unit sphere.



The point (x_1, y_1) is used in the following way to determine the (x, y, z) co-ordinates of a random point on a circle with radius r :

$$\begin{aligned} x &= 2 r x_1 \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2} \\ y &= 2 r y_1 \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2} \\ z &= 2 r \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2} \end{aligned}$$

$$y = 2r y_1 \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2} \quad z = r - 2r(x_1^2 + y_1^2)$$

Assignment

Write a function that can be used to generate a random point on a sphere with radius r in \mathbb{R}^3 . A value for r can be given to the function optionally. Standard, the random point is generated on the unit sphere. The function must print a tuple with the (x,y,z) co-ordinates of the random point.

Example

```
>>> spherecoordinate()
(0.8208783192500947, 0.24904502507471912, 0.5139410087458212)
>>> spherecoordinate()
(0.1705946803883025, 0.9853183076681309, 0.006729606022916168)
>>> spherecoordinate()
(0.5245775493577824, 0.47160784998323607, -0.7088049312356488)

>>> spherecoordinate(1.2)
(1.006669684101887, 0.41835600224171376, 0.10767730725894864)
>>> spherecoordinate(5.8)
(0.3653448756504214, 0.8635619785170504, -2.2182839834195476)
>>> spherecoordinate(4.9)
(0.5245775493577824, 0.47160784998323607, -0.7088049312356488)
```

Voorbereiding

De module [random](#) uit de Standard Python Library kan onder andere gebruikt worden om willekeurige getallen te genereren. De functie `random()` uit deze module genereert een willekeurig *reëel* getal uit het interval $[0, 1]$. De functie `randint(a, b)` kan dan weer gebruikt worden om een willekeurig *geheel* getal te genereren uit het interval $[a, b]$. Onderstaande interactieve Python sessie geeft aan de hand van enkele voorbeelden aan hoe je de functies uit de module `random` kunt gebruiken.

```
>>> import random
>>> help(random.random)
Help on built-in function random:

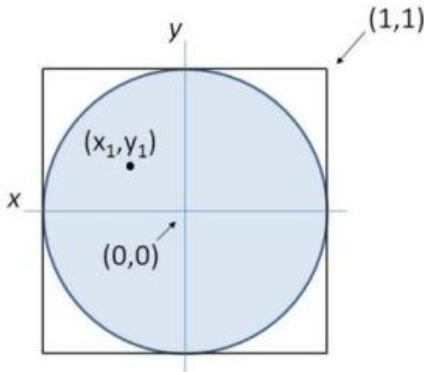
random(...)
    random() -> x in the interval [0, 1).
>>> random.random()
0.954131645221452
>>> random.random()
0.3548429482674793

>>> help(random.randint)
Help on method randint in module random:

randint(self, a, b) method of random.Random instance
    Return random integer in range [a, b], including both end points.
>>> random.randint(3, 10)
5
>>> random.randint(3, 10)
8
```

Omschrijving

Een bol kan voorgesteld worden als de verzameling van alle punten op afstand r vanaf het centraal punt $(0,0,0)$. Indien $r=1$ dan spreekt men van de eenheidsbol. De [methode van Marsaglia](#) kan gebruikt worden om een willekeurig punt op een bol met straal r te genereren. In een eerste stap van deze methode wordt een willekeurig punt (x_1, y_1) gekozen dat binnen de eenheidscirkel gelegen is. Dit is een punt waarvoor geldt dat $x_1^2 + y_1^2 \leq 1$. Om dit te doen worden willekeurige punten gegenereerd in het 2-bij-2 vierkant $[-1,1] \times [-1,1]$ met centrum in $(0,0)$, totdat een punt gevonden wordt dat binnen de eenheidscirkel ligt.



Het punt (x_1, y_1) wordt vervolgens gebruikt om op de volgende manier de (x, y, z) coördinaten van een willekeurig punt op de bol met straal r te bepalen:

$$\begin{aligned} x &= 2 r x_1 \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2} \\ y &= 2 r y_1 \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2} \\ z &= r - 2r(x_1^2 + y_1^2) \end{aligned}$$

Opgave

Schrijf een functie waarmee een willekeurig punt op een bol met straal $r \in \mathbb{R}$ kan gegenereerd worden. Aan deze functie kan optioneel een waarde voor r doorgegeven worden. Standaard wordt een willekeurig punt op de eenheidsbol gegenereerd. De functie moet als resultaat een tuple met de (x, y, z) coördinaten van het willekeurige punt teruggeven.

Voorbeeld

```
>>> bolcoördinaat()
(0.8208783192500947, 0.24904502507471912, 0.5139410087458212)
>>> bolcoördinaat()
(0.1705946803883025, 0.9853183076681309, 0.006729606022916168)
>>> bolcoördinaat()
(0.5245775493577824, 0.47160784998323607, -0.7088049312356488)

>>> bolcoördinaat(1.2)
(1.006669684101887, 0.41835600224171376, 0.10767730725894864)
>>> bolcoördinaat(5.8)
(0.3653448756504214, 0.8635619785170504, -2.2182839834195476)
>>> bolcoördinaat(4.9)
(0.5245775493577824, 0.47160784998323607, -0.7088049312356488)
```