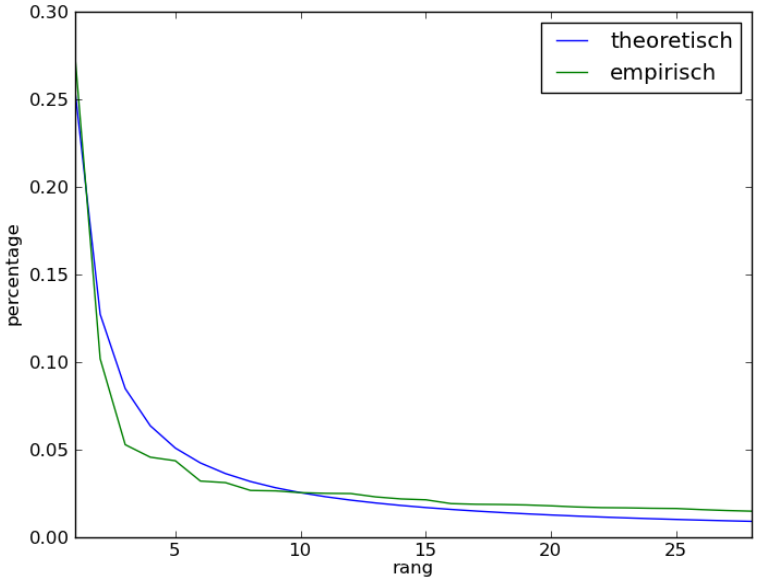
Zipfs Law

Zipf's law, a remarkable regularity in distribution, states that given some corpus of natural language utterances, the frequency of any word is inversely proportional to its rank in the frequency table. Thus the most frequent word will occur approximately twice as often as the second most frequent word, three times as often as the third most frequent word, etc. However, this law can also be found outside of linguistics. By now it has been shown that a generalization of Zipf's Law also applies to a lot of other data sets. For example, the distribution of population over the cities in a country seems to follow Zipf's Law to a certain extent, as illustrated below for the population of the 28 largest cities in France.



The population of a series of French cities follows Zipf's Law.

In its general form Zipf's law can be described as follows. A distribution follows Zipf's law if the n-th part of the distribution (if the distribution is arranged from large to small) contains the percentage $p(n, \lambda, N)$ of the total. Here N is the total amount of parts in the distribution and λ is a parameter that equals 1 in the original version of Zipf's law. The percentage $p(n, \lambda, N)$ is given by the formula below: \[p(n, \lambda, N) = \frac{1}{\sum_{k=1}^Nk^{-\lambda}}n^{-\lambda} \]

Assignment

1. Write a function zipf that returns the theoretical percentage that should be in the n-th part of a distribution in N parts if a Zipfian distribution applies with a parameter λ. The values for n and N must be passed as an argument to the function and the value for λ can be passed as well with a default value equal to 1.
2. Write a function readData, to which, as an argument, a file object must be passed. This file object must refer to an opened text file, of which the lines contain an equal amount of information fields that are separated by one dash. The function should return a list of integer values, that contains the values from the given column of the text file. This column (field numbers are counted from 1) must be passed on as a second obligatory argument. If the given field of the text file contains real numbers, then these have to be rounded off to the closest integer value. Optionally, a third argument can be passed to the function: the dash

that is used to separate the information fields in the text file. Use a tab as the default value for this optional argument.

3. Write a function testZipf that can be used to check if a given list of integer values (that is passed to the function as an argument) meets Zipf's law with a certain parameter λ (which can be passed as argument with name 1 and default value 1). For each n-th part of the list the function must print the number n on a separate line (right aligned over the maximum of positions necessary to print the length of the list), followed by the amount in the n-th part (right aligned over 6 positions), the theoretical percentage $p(n, \lambda, N)$ and the percentage of n-th part in the given list. Both percentages are right aligned over 10 positions, and are rounded off to four decimal places.

Example

The following interactive Python session uses the file france.txt. This is the text file that consists of two columns (separated by a tab): *i*) the name and *ii*) the number of inhabitants (per thousand) of a city in France.

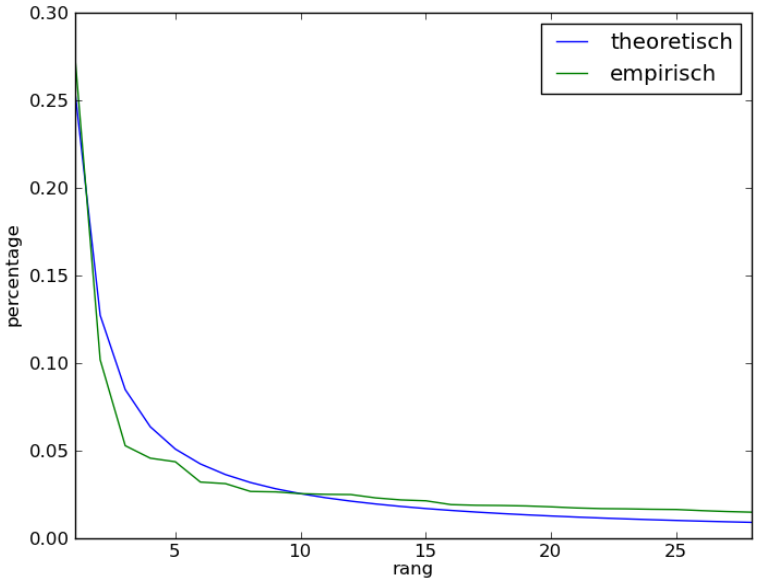
```
>>> zipf(1, 28)
0.25463622288862675
>>> zipf(2, 28, 3)
0.1040416849914885

>>> cities = readData(open('france.txt', 'r'), 2)
>>> cities
[124, 132, 141, 210, ..., 359, 130, 117]

>>> testZipf(cities)
 1  2152    0.2546    0.2741
 2   800    0.1273    0.1019
 3   415    0.0849    0.0529
 4   359    0.0637    0.0457
 5   343    0.0509    0.0437
 6   252    0.0424    0.0321
 7   245    0.0364    0.0312
 8   210    0.0318    0.0267
 9   208    0.0283    0.0265
10   200    0.0255    0.0255
11   197    0.0231    0.0251
12   196    0.0212    0.0250
13   181    0.0196    0.0231
14   172    0.0182    0.0219
15   168    0.0170    0.0214
16   151    0.0159    0.0192
17   148    0.0150    0.0189
18   147    0.0141    0.0187
19   145    0.0134    0.0185
20   141    0.0127    0.0180
21   136    0.0121    0.0173
22   133    0.0116    0.0169
23   132    0.0111    0.0168
24   130    0.0106    0.0166
25   129    0.0102    0.0164
26   124    0.0098    0.0158
27   120    0.0094    0.0153
28   117    0.0091    0.0149
```

Example

The following interactive Python session uses the file belgium.txt. This is the text file that consists of three columns (separated by a tab): *i*) the name of a city in Belgium *ii*) the number of inhabitants (per thousand) of the city and iii) the number of inhabitants (per thousand) of the corresponding agglomeration.

```
>>> belgium = open('belgium.txt', 'r')
>>> belgium_cities = readData(belgium, 2, ',')
>>> print(belgium_cities)
[470, 92, 117, 136, 207, 231, 76, 197, 104]
>>> testZipf(belgium_cities, 0.77)
1   470    0.2849    0.2883
2   231    0.1671    0.1417
3   207    0.1223    0.1270
4   197    0.0980    0.1209
5   136    0.0825    0.0834
6   117    0.0717    0.0718
7   104    0.0637    0.0638
8    92    0.0575    0.0564
9    76    0.0525    0.0466
>>> belgium = open('belgium.txt', 'r')
>>> belgium_suburbs = readData(belgium, 3, ',')
>>> print(belgium_suburbs)
[668, 175, 117, 960, 295, 251, 114, 485, 104]
>>> testZipf(belgium_suburbs, l=0.84)
1   960    0.3052    0.3029
2   668    0.1705    0.2108
3   485    0.1213    0.1530
4   295    0.0953    0.0931
5   251    0.0790    0.0792
6   175    0.0678    0.0552
7   117    0.0595    0.0369
8   114    0.0532    0.0360
9   104    0.0482    0.0328
```

De wet van Zipf is een wetmatigheid die opduikt bij de verdeling van bepaalde getallenreeksen. Bij de analyse van de frequentie van woorden in natuurlijke talen, ontdekte George Kingsley Zipf — naar wie de wet genoemd werd — namelijk dat het meest gebruikte woord ongeveer tweemaal zo vaak voorkomt als het tweede woord, ongeveer driemaal zo vaak als het derde woord, enzovoort. Deze wetmatigheid komt echter niet alleen in de linguïstiek voor. Ondertussen is namelijk gebleken dat een veralgemening van de wet van Zipf ook op een heleboel andere datasets van toepassing is. Zo lijkt de verdeling van een bevolking over de steden in een land tot op een bepaalde hoogte de wet van Zipf te volgen, zoals hieronder geïllustreerd voor het bevolkingsaantal van de 28 grootste steden van Frankrijk.



Het bevolkingsaantal van een reeks Franse steden volgt de wet van Zipf.

In zijn algemene vorm kan de wet van Zipf als volgt omschreven worden. Een verdeling volgt de wet van Zipf als het n-de deel van de verdeling (als die verdeling van groot naar klein is gerangschikt) het percentage $p(n, \lambda, N)$ van het totaal bevat. Hierin is N het totaal aantal delen in de verdeling en λ een parameter die in de oorspronkelijke versie van de wet van Zipf gelijk was aan 1. Het percentage $p(n, \lambda, N)$ wordt gegeven door onderstaande formule: \[p(n, \lambda, N) = \frac{1}{\sum_{k=1}^Nk^{-\lambda}}n^{-\lambda} \]

Opgave

1. Schrijf een functie zipf die het theoretisch percentage teruggeeft dat in het n-de deel van een verdeling in N delen zou moeten zitten als de verdeling de wet van Zipf volgt met een parameter λ. De waarden voor n en N moeten als verplicht argument aan de functie doorgegeven worden en de waarde voor λ moet als optioneel argument aan de functie worden doorgegeven met een standaardwaarde die gelijk is aan 1.
2. Schrijf een functie leesData, waaraan als eerste verplicht argument een bestandsobject moet doorgegeven worden. Dit bestandsobject moet verwijzen naar een geopend tekstbestand, waarvan alle regels eenzelfde aantal informatievelden bevatten die telkens van elkaar gescheiden worden door één enkel scheidingskarakter. De functie moet als resultaat de lijst van integerwaarden teruggeven, die de waarden uit een gegeven kolom van het tekstbestand bevat. Deze kolom (veldnummers worden geteld vanaf 1) moet als tweede verplicht argument aan de functie doorgegeven worden. Indien het opgegeven veld van het tekstbestand reële getallen bevat, dan moeten deze afgerond worden naar de dichtstbijzijnde integerwaarde. Optioneel kan een derde argument aan de functie doorgegeven worden: het scheidingskarakter dat gebruikt wordt om de informatievelden in het tekstbestand van elkaar te scheiden. Gebruik een tab als standaardwaarde voor dit optioneel argument.
3. Schrijf een functie testZipf die kan gebruikt worden om na te gaan of een gegeven lijst van integerwaarden (die als argument aan de functie doorgegeven wordt) voldoet aan de wet van Zipf met een bepaalde parameter λ (die als optioneel argument met naam l en standaardwaarde 1 aan de functie doorgegeven wordt). Voor elk n-de deel in de lijst

moet de functie op een afzonderlijk regel eerst het nummer n zelf uitschrijven (rechts uitgelijnd over het maximaal aantal posities nodig om de lengte van de lijst uit te schrijven), gevolgd door het aantal in het n-de deel (rechts uitgelijnd over 6 posities), het theoretische percentage $p(n, \lambda, N)$ en het percentage van het n-de deel in de gegeven lijst. Beide percentages worden telkens rechts uitgelijnd over 10 posities, en worden weergegeven afgerond tot op vier cijfers na de komma.

Voorbeeld

Onderstaande interactieve Pythonsessie maakt gebruik van het bestand frankrijk.txt. Dit is een tekstbestand dat bestaat uit twee kolommen (van elkaar gescheiden door een tab): i) de naam en ii) het aantal inwoners (per duizend) van een stad in Frankrijk.

```
>>> zipf(1, 28)
0.25463622288862675
>>> zipf(2, 28, 3)
0.1040416849914885

>>> steden = leesData(open('frankrijk.txt', 'r'), 2)
>>> steden
[124, 132, 141, 210, ..., 359, 130, 117]

>>> testZipf(steden)
 1  2152    0.2546    0.2741
 2   800    0.1273    0.1019
 3   415    0.0849    0.0529
 4   359    0.0637    0.0457
 5   343    0.0509    0.0437
 6   252    0.0424    0.0321
 7   245    0.0364    0.0312
 8   210    0.0318    0.0267
 9   208    0.0283    0.0265
10   200    0.0255    0.0255
11   197    0.0231    0.0251
12   196    0.0212    0.0250
13   181    0.0196    0.0231
14   172    0.0182    0.0219
15   168    0.0170    0.0214
16   151    0.0159    0.0192
17   148    0.0150    0.0189
18   147    0.0141    0.0187
19   145    0.0134    0.0185
20   141    0.0127    0.0180
21   136    0.0121    0.0173
22   133    0.0116    0.0169
23   132    0.0111    0.0168
24   130    0.0106    0.0166
25   129    0.0102    0.0164
26   124    0.0098    0.0158
27   120    0.0094    0.0153
28   117    0.0091    0.0149
```

Voorbeeld

Onderstaande interactieve Pythonsessie maakt gebruik van het bestand belgie.txt. Dit is een tekstbestand dat bestaat uit drie kolommen (van elkaar gescheiden door een komma): i) de naam

van een stad in België, ii) het aantal inwoners (per duizend) van die stad en iii) het aantal inwoners (per duizend) van de corresponderende agglomeratie.

```
>>> belgie = open('belgie.txt', 'r')
>>> belgie_steden = leesData(belgie, 2, ',')
>>> print(belgie_steden)
[470, 92, 117, 136, 207, 231, 76, 197, 104]
>>> testZipf(belgie_steden, 0.77)
1   470    0.2849    0.2883
2   231    0.1671    0.1417
3   207    0.1223    0.1270
4   197    0.0980    0.1209
5   136    0.0825    0.0834
6   117    0.0717    0.0718
7   104    0.0637    0.0638
8    92    0.0575    0.0564
9    76    0.0525    0.0466
>>> belgie = open('belgie.txt', 'r')
>>> belgie_agglom = leesData(belgie, 3, ',')
>>> print(belgie_agglom)
[668, 175, 117, 960, 295, 251, 114, 485, 104]
>>> testZipf(belgiebelgie_agglom, l=0.84)
1   960    0.3052    0.3029
2   668    0.1705    0.2108
3   485    0.1213    0.1530
4   295    0.0953    0.0931
5   251    0.0790    0.0792
6   175    0.0678    0.0552
7   117    0.0595    0.0369
8   114    0.0532    0.0360
9   104    0.0482    0.0328
```